

Érvényes-e a Shannon-formula?  
Gondolatok az információközlés sebességének korlátjáról

Ladvánszky János  
HTE előadás, 2021.11.10.

## Az előadás vázlatja

1. A Shannon-formula eredeti formájában nem mindig érvényes  
Bizonyíték:  
Costas hurok hajtogató módszerrel, Matlab analízis
2. A formula módosítása  
Levezetés a színes zajra vonatkozó formulából
3. Az átlagolásos zajcsökkentésnek nincs elvi alsó korlátja  
3 megjelent cikk

## A Shannon-formula eredeti formája

$$C = W * \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

$C$  – csatornkapacitás: az átlagos bitsebesség maximuma

$W$  – sáv szélesség

$S$  – teljes jel teljesítmény

$N$  – teljes zaj teljesítmény

$\frac{S}{N}$  - jel-zaj viszony

A képlet jelentése:  $C$  -t a sáv szélesség és a jel-zaj viszony korlátozza

**Probléma: A zaj sáv szélessége sokkal nagyobb, mint a jelé**

A zaj sávszélessége sokkal nagyobb, mint a jelé

A jel és a zaj ugyanazon a sávszűrőn megy át

$$C = W * \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

$N$  a teljes zajteljesítmény a képletben

Sejtés:  $C$  nem a jel-zaj viszonytól függ

???

## Példa: 4QAM jel visszaállítása módosított Costas hurokkal

Rendszer adatok:

Bitsebesség: 2MS/s, 4QAM

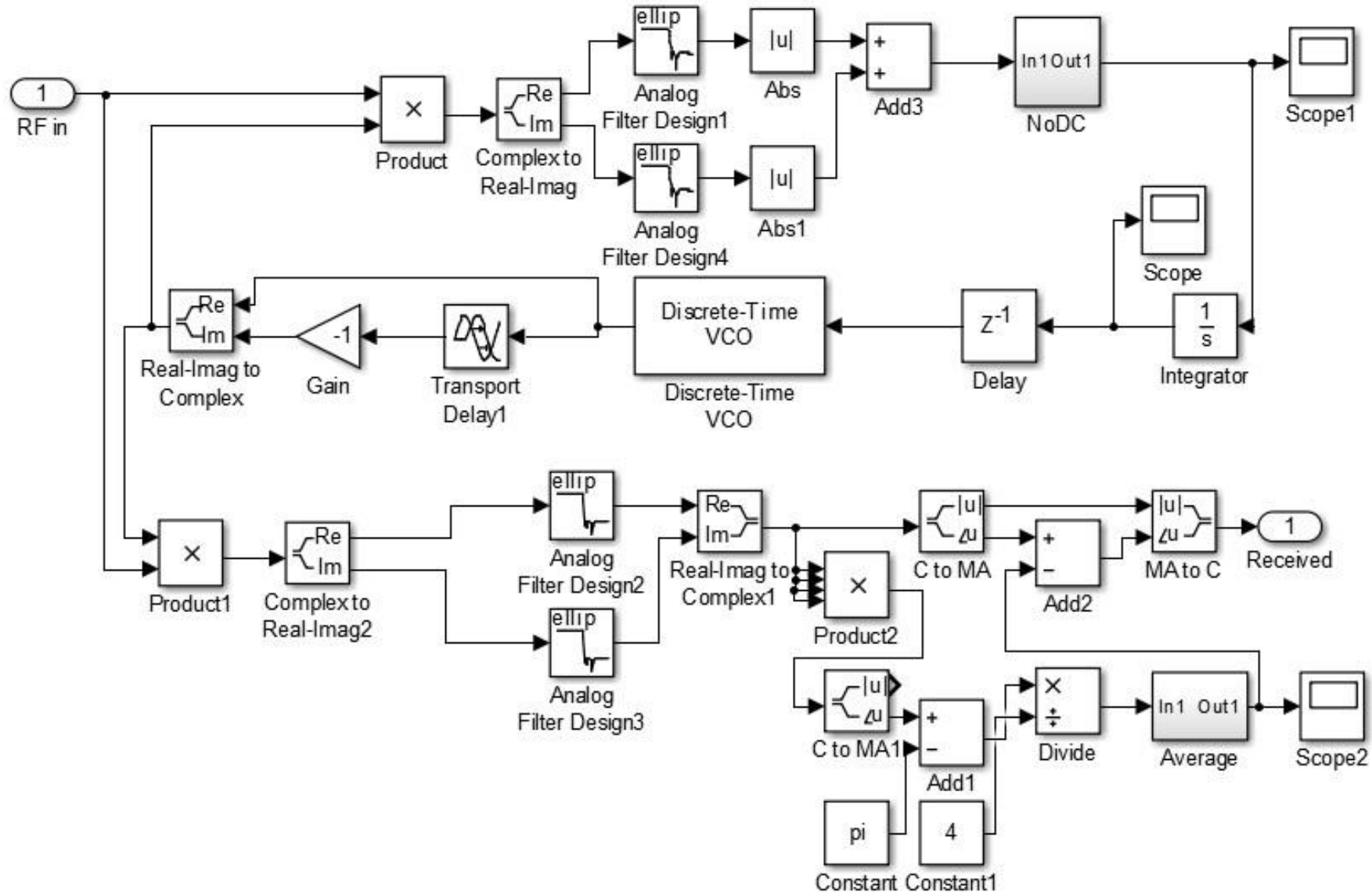
$W = 4$  MHz

$\frac{S}{N} = -13$  dB

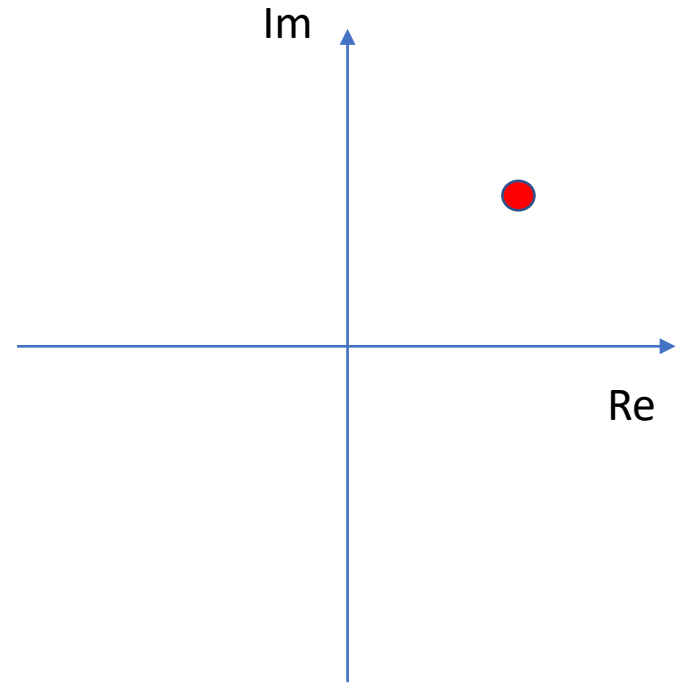
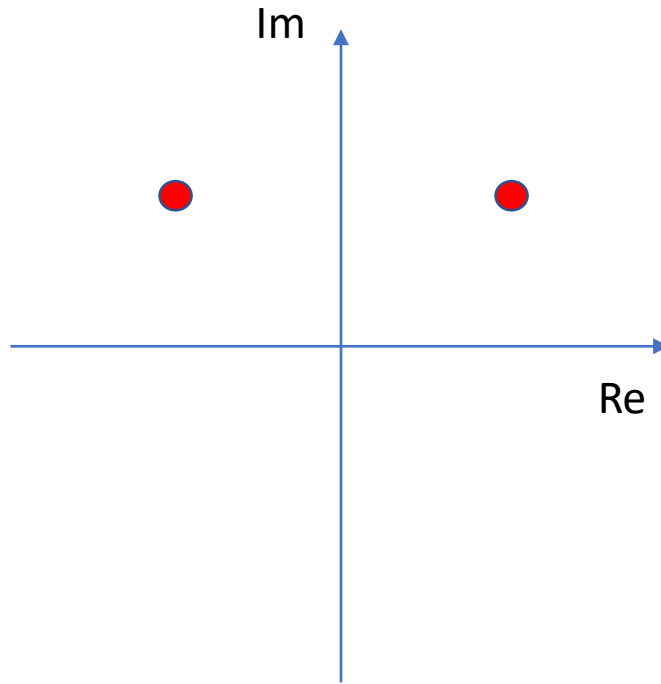
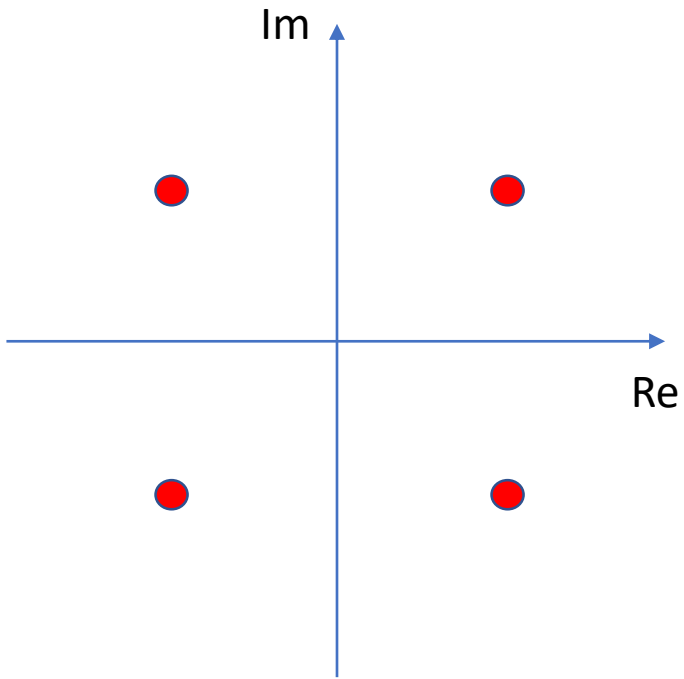
$C = 282$  kS/s

A bitsebesség nagyobb, mint  $C$ , a Shannon formula sérül

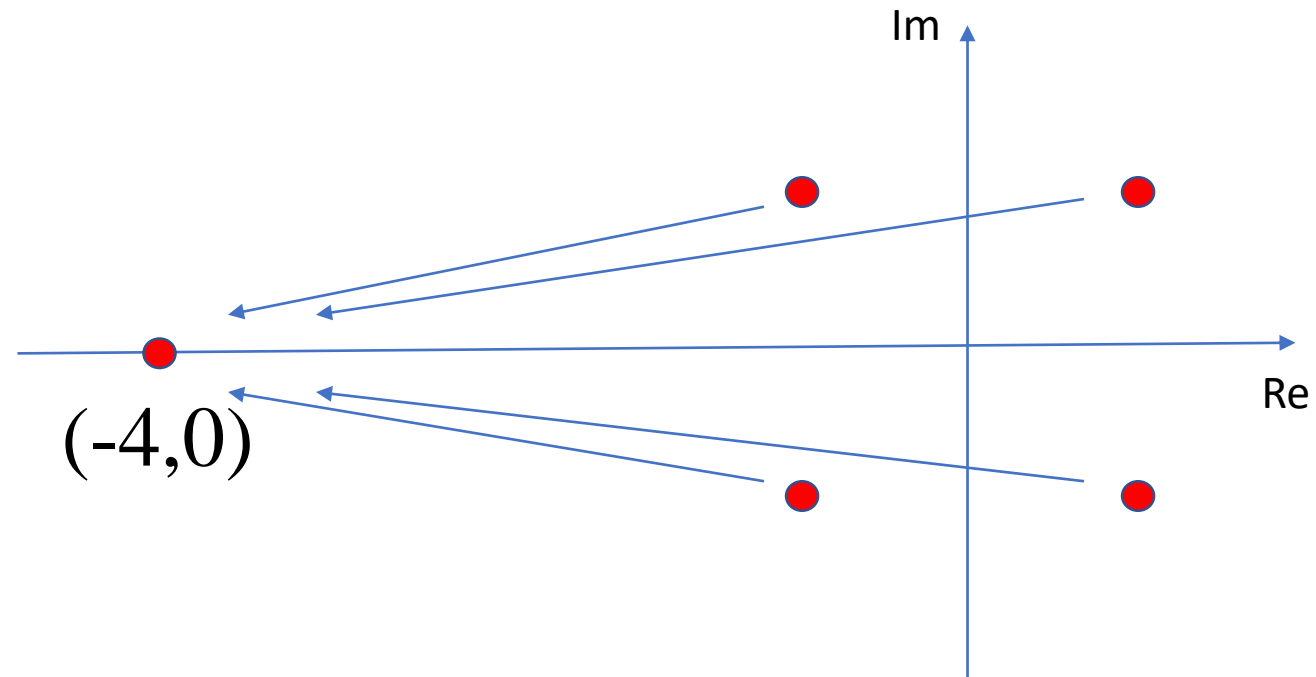
# Módosított Costas-hurok hajtogató módszerrel



# Hajtogató módszer



# Negyedik hatványra emelő módszer





A hajtogató módszer nem növeli a zajt,  
de a negyedik hatványra emelő módszer igen

A probléma és intuitív megoldása

$$C = W * \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

A zaj sávszélessége sokkal nagyobb, mint a jelé

Intuitív megoldás

$$C = B_S * \log_2 \left( 1 + \frac{S}{PDN * B_S} \right)$$

$B_S$  - a jel sávszélessége

Probléma: Nincs megindokolva

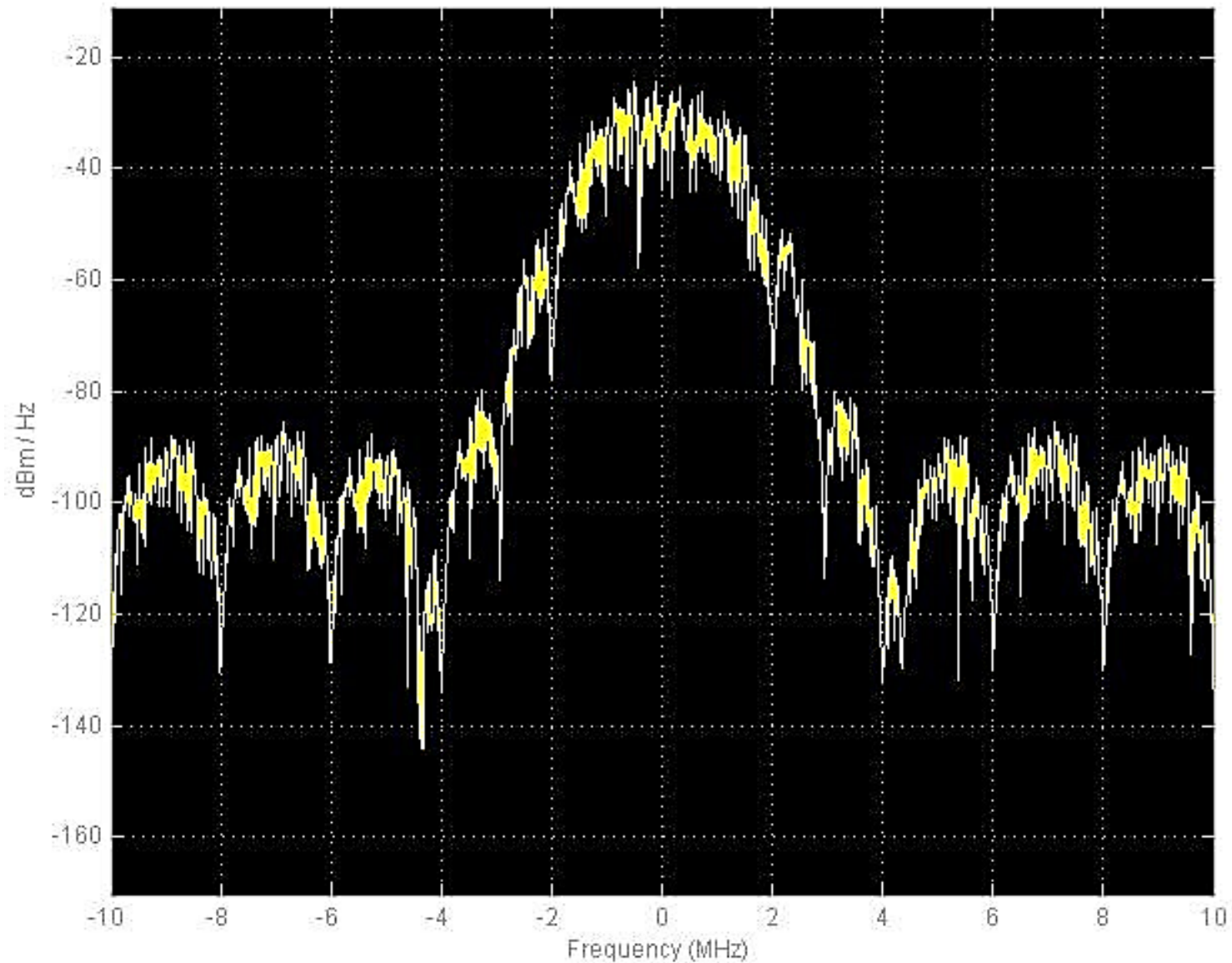
Az intuitív megoldás megjelenése kézikönyvben

Az intuitív megoldás megjelenése kézikönyvekben

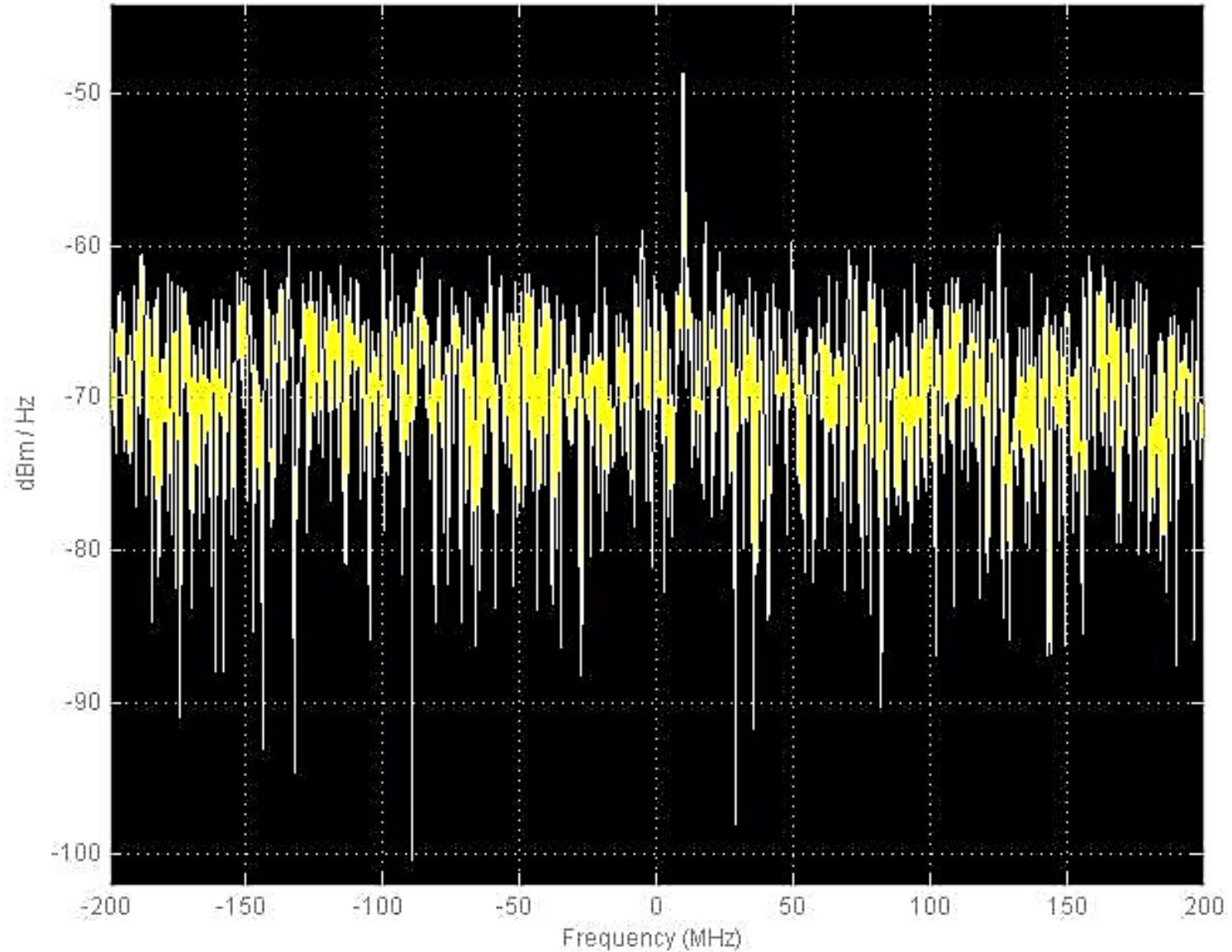
D. Tse, „Fundamentals of wireless communication”, 2004, Cambridge University Press, p. 202

$$C_{\text{awgn}}(\bar{P}, W) = W \log \left( 1 + \frac{\bar{P}}{N_0 W} \right) \text{ bits/s.} \quad (5.12)$$

# A jel sávszélessége



# A zaj sávszélessége



## Megoldás levezetéssel

Megmutatom, hogy a módosítás Shannon egy későbbi (1949) eredményéből levezethető

Csatornkapacitás színezett (frekvenciafüggő) zaj esetén:

$$C_1 = \int_0^W \log_2 \left( 1 + \frac{S(f)}{N(f)} \right) df$$

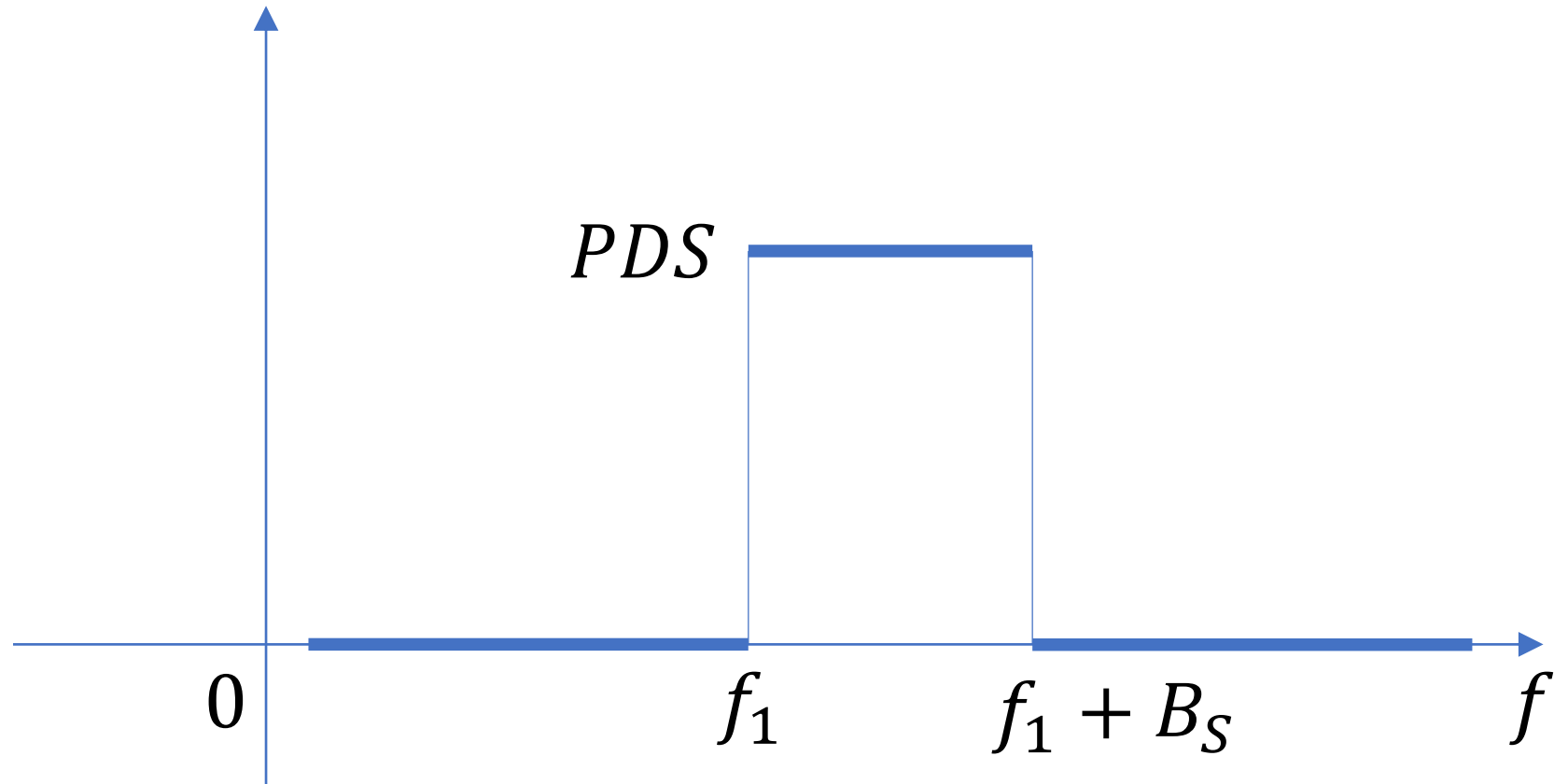
Megoldás: Meg kell adni a  $S(f)$  és  $N(f)$  függvényeket, és a műveleteket elvégezni.

$$S(f) = \begin{cases} PDS \text{ if } f_1 \leq f \leq f_1 + B_S \\ 0 \text{ egyébként} \end{cases}$$

$$N(f) = \begin{cases} PDN \text{ if } 0 \leq f \leq B_N \\ 0 \text{ if } f > B_N \end{cases}$$

ahol  $PDS$  és  $PDN$  a jel és a zaj átlagos spektrális sűrűsége,  
és  $B_S + f_1 < B_N$

$$S(f) = \begin{cases} PDS & \text{if } f_1 \leq f \leq f_1 + B_S \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$





$$C_1 = \int_0^{\infty} \log_2 \left( 1 + \frac{S(f)}{N(f)} \right) df = B_S \log_2 \left( 1 + \frac{PDS}{PDN} \right)$$

Ellenőrzés a bevezetőben említett példával

$$C_1 = B_S \log_2 \left( 1 + \frac{PDS}{PDN} \right)$$

$$B_S = 4 \text{ MHz}$$

$$PDS = -52 \text{ dBm/Hz}$$

$$PDN = -72 \text{ dBm/Hz}$$

$C_1 = 26.6 \text{ MS/s}$ ,  $C_1 > B_S$ , a feltétel teljesül.

## A jel/zaj viszony új definíciója

Régi képlet:

$$C = W * \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

Új képlet:

$$C_1 = B_S \log_2 \left( 1 + \frac{PDS}{PDN} \right)$$

Javaslat: A jel/zaj viszony  $\frac{S}{N}$  helyett  $\frac{PDS}{PDN}$  legyen

A zajcsökkentésnek nincs elvi alsó korlátja

Zajcsökkentés: entrópia minimalizálás

A Shannon-entrópia képlete:

$$H = - \sum_i p_i \lg p_i$$

ahol  $p_i$  az  $i$ -edik szimbólum valószínűsége

Bináris üzenet esetén:

$$H(p) = -p \lg p - (1 - p) \lg(1 - p)$$

## A gondolatmenet vázlata

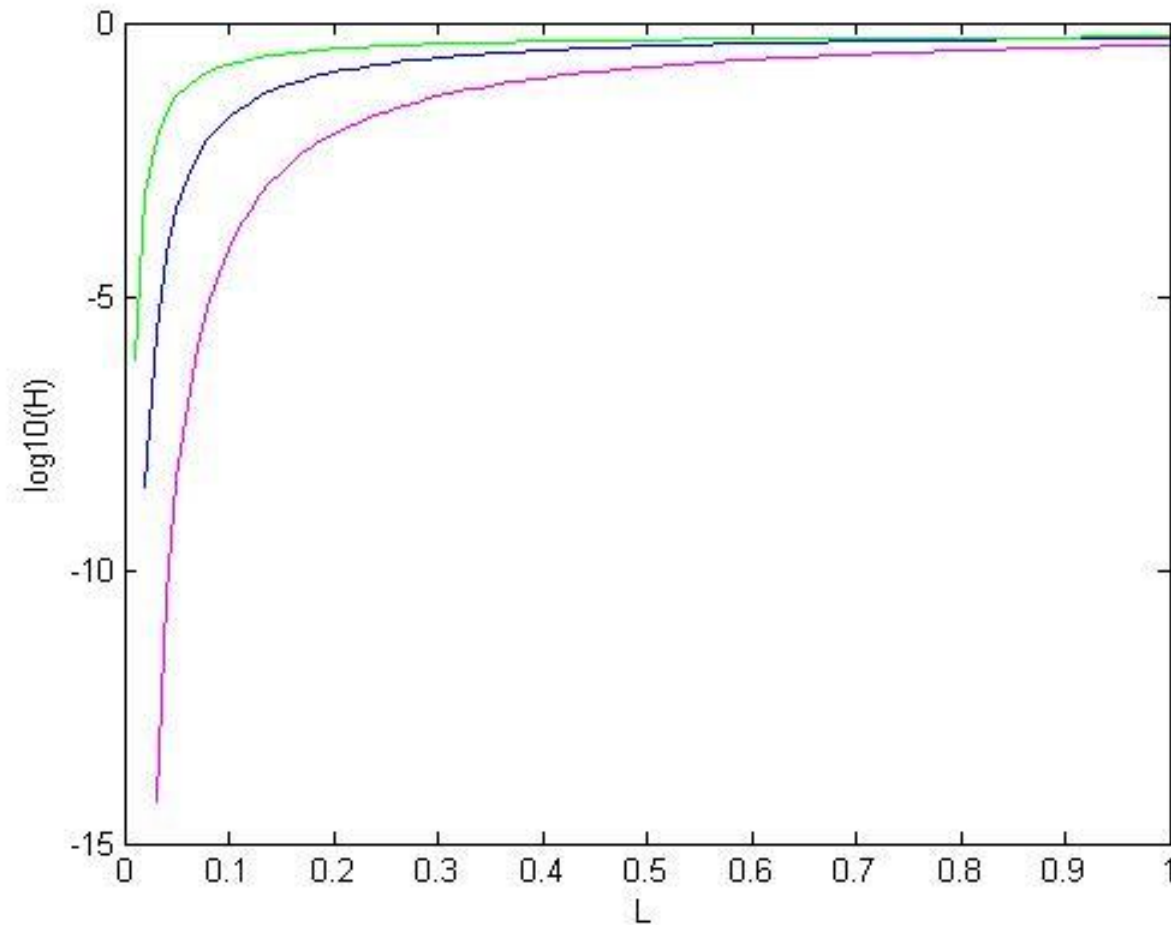
Az entrópia kifejezhető a jel-zaj viszony függvényeként

Alsó korlát létezik, ha az entrópiának minimuma van

De igazolható, hogy az entrópia szigorúan monoton

Nincs minimum, nincs elvi alsó korlát

Nincs minimum, nincs elvi alsó korlát



Lila: 4QAM, kék: 16QAM, zöld: 64QAM

Nincs minimum, nincs elvi alsó korlát

Jelenti-e ez azt, hogy az információ továbbítás végtelen gyors lehet?

Nem, mert az átlagolás a sebességet lassítja

Az átlagolás a szimbólum-hibarányt javítja

# Publikációk

- Ladvánszky, J. (2020). Noise reduction in digital communications – A modified Costas loop. *Infocommunications Journal.*, December 2020, 2-5.
- Ladvánszky, J. (2020). A Modification to the Shannon Formula. *Netw. Commun. Technol.*, 5(2), 1-6.
- Ladvánszky, J. (2021). There is no theoretical limit for noise reduction in digital communications. *Netw. Commun. Technol.*, 5(2), 34-42.



# Összefoglalás

A Shannon formula eredeti formájában nem mindig érvényes

Módosítást javaslok, amely mindig érvényes

Bár a zaj átlagolással korlátlanul csökkenthető, de az átlagolás lassítja az információ-továbbítás sebességét

# Köszönetnyilvánítás

Dr. Baranyi Andrásnak,  
Prof. Dr. Berceli Tibornak,  
Prof. Dr. Lajtha Györgynek,  
Dr. Simonyi Ernőnek,  
Dr. Schmideg Ivánnak.

Köszönöm a figyelmet.